Δομες

11/05/15

Δακτυλιος (δυο πραξεις)

$S \leq R$ (δακτυλιος) $I \trianglelefteq R$ ιδεωδες

υποδακτυλιος

$I \leq R$ ωστε $\forall r \in R$ και $s \in I$

$\Rightarrow rs, sr \in I$

I κυριο $\{0\} < I < R$

πρωτο αν $ab \in I \Rightarrow a$ ή $b \in I$

μεγιστο αν $I < R$ και δεν υπαρχει

$J \trianglelefteq R$, $J \lneq R$ με $I \lneq J$

Ακεραια περιοχη = Αντιμεταθετικος, μοναδιαιος χωρις μηδενοδιαιρετες

R αντιμεταθετικος μοναδιαιος τοτε I πρωτο στον R <=> R/I ακεραια περιοχη

ΘΕΩΡΗΜΑ: (χωρις αποδειξη)

Αν R αντιμεταθετικος μοναδιαιος τοτε I μεγιστο ιδεωδες στο R <=> R/I σωμα

Π.χ: $p\mathbb{Z}$, p πρωτος, $p\mathbb{Z}$ και πρωτο και μεγιστο

$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_p$ σωμα

Προταση:

Αν R ειναι αντιμεταθετικος μοναδιαιος, τοτε I μεγιστο => I πρωτο

R/I σωμα => Ακερ Περ => I πρωτο

Π.χ: $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ και $\mathbb{Z} \oplus \{0\}$ πρωτο ιδεωδες

Αλλα οχι μεγιστο $\mathbb{Z} \oplus \{0\} \leq \mathbb{Z} \oplus 2\mathbb{Z}$

Άσκηση:

$R = \{ q \in \mathbb{Q} \text{ με } q = \frac{a}{2n+1},\ a, n \in \mathbb{Z} \} \underset{\neq}{\leq} \mathbb{Q}$

$\frac{1}{2} \notin R$, R δακτύλιος

$$\frac{a}{2n+1} + \frac{b}{2n+1} = \frac{\circ \quad \circ \quad \circ}{(2n+1)(2n+1)}$$

$$\frac{a}{2n+1} \cdot \frac{b}{2n+1} = \frac{a \cdot b}{(2n+1)(2n+1)} \in R$$

$R \leq \mathbb{Q}$ R αντιμεταθετικός μοναδιαίος.

Μέγιστο ιδεώδες

R όχι σώμα γιατί $2 \in R$ αλλά $2^{-1} \notin R$

$$I = \left\{ \frac{3k}{2n+1} \,\middle|\, k, n \in \mathbb{Z} \right\} \underset{\neq}{\trianglelefteq} R$$

$$\frac{3k}{2n+1} + \frac{3k'}{2n'+1} = \frac{3(k(2n'+1) + k'(2n+1))}{(2n+1)(2n'+1)}$$

$$\frac{3k}{2n+1} \cdot \frac{3k'}{2n'+1} = 3(\qquad) \Rightarrow I \underset{\neq}{\leq} R$$

$$I \trianglelefteq R \quad \frac{a}{2n+1} \cdot \frac{3k}{2n'+1} = 3(\qquad)$$

I μέγιστο;

Έστω ότι δεν είναι μέγιστο τότε:

$$I \underset{\neq}{\subseteq} J \underset{\neq}{\trianglelefteq} R \Rightarrow \exists \frac{a}{2n+1} \in J - I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \notin 3\mathbb{Z} \Rightarrow a \in \mathbb{Z} - 3\mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = 3k+1 \text{ ή } 3k+2$$

Εστω:

$$\frac{3k+1}{2n+1} - \frac{3k}{2n+1} \in J \Rightarrow \frac{1}{2n+1} \in J \triangleleft R$$

$$(2n+1)\cdot\frac{1}{2n+1} \in J \Rightarrow 1 \in J \Rightarrow J = R$$

αδυνατο.

Ομομορφισμοί Δακτυλίων:

R, T δακτύλιοι

$\varphi: R \Rightarrow T$ ομομορφισμός δακτυλίων

$\Leftrightarrow \varphi(r_1+r_2) = \varphi(r_1) + \varphi(r_2)$, $\varphi(r_1 \cdot r_2) = \varphi(r_1)\cdot\varphi(r_2)$ $\forall r_1, r_2 \in R$

Ιδιοτητες:

1) $\varphi(0_R) = 0_T$

2) Αν 1_R, 1_T μοναδιαιοι δακτυλιοι $\Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi(1_R) = 1_T$ οχι παντα.

π.χ: $\varphi: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ τετριμμενος ομομορφισμός

$\varphi(n) = 0$

$\varphi(1) = 0 \neq 1$

3) Αν R, T μοναδιαιοι, τοτε $\varphi(1_R) = 1_T$ όταν:

α) φ επι

β) $\varphi(1) \neq 0$ και ο T ειναι ακεραια περιοχη

Αποδειξεις:

α) φ επι $\Rightarrow 1_T = \varphi(a)$ για καποιο $a \in R$

Θελουμε $\varphi(a) = 1_T \Leftrightarrow \forall s \in T \Rightarrow s\varphi(a) = \varphi(a)s = s$

φ επι $\forall s \in T \Rightarrow \exists\, b \in R$ με $\varphi(b) = s$

Αρκει ναδο $\varphi(b)\cdot\varphi(a) = \varphi(b)$

$a = 1 \Rightarrow b\cdot 1 = b \Rightarrow \varphi(b\cdot 1) = \varphi(b) \Rightarrow \varphi(b)\cdot\varphi(1) = \varphi(b)$

$\varphi(B)$ ανχαιο στον T. Αρα
$\varphi(B)\varphi(1) = \varphi(B) \Rightarrow s \cdot \varphi(1) = s, \forall s \in T \Rightarrow$
$\Rightarrow \varphi(1) = 1_T$.

4) $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}, \forall a^{-1} \in R$ και $\varphi(1_R) = 1_T$
5) $\varphi(a^n) = \varphi(a)^n$

<u>Αποδειξη</u>:

4) $a a^{-1} = 1_R \Rightarrow \varphi(a)\cdot\varphi(a^{-1}) = \varphi(1_R) = 1_T \Rightarrow$
$\Rightarrow \varphi(a)^{-1} = \varphi(a^{-1})$.

<u>Θεωρια</u>:
Οπως και στους ομομορφισμους ομαδων ετσι και εδω ορίζονται μονομορφισμος.
επιμορφισμος
ισομορφισμος
Η συνθεση ομομορφισμων δακτυλιων ειναι ομομορφισμος επισης.

<u>Θεωρημα</u>:
Εστω $\varphi: R \to T$ ομομορφισμος δακτυλιων. Τοτε:
α) αν $S \leq R \Rightarrow \varphi(S) \leq T$
β) αν $U \leq T \Rightarrow \varphi^{-1}(U) \leq R$
γ) αν $U \triangleleft T \Rightarrow \varphi^{-1}(U) \triangleleft R$
δ) αν φ επιμορφισμος και $I \triangleleft R \Rightarrow$
$\Rightarrow \varphi(I) \triangleleft T$

<u>Ορισμος</u>:
Εστω $\varphi: R \to T$ ομομορφισμος δακτυλιων. Το συνολο $\ker\varphi = \{r \in R / \varphi(r) = 0\}$ καλειται πυρηνας του φ.

Πρόταση:

Αν $\varphi: R \to T$ ομομορφισμός, τότε $Ker\varphi \triangleleft R$.

Απόδειξη: $Ker\varphi \subseteq R$ διότι

αν $r_1, r_2 \in Ker\varphi \Rightarrow r_1 + r_2 \in Ker\varphi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \varphi(r_1 + r_2) = \varphi(r_1) + \varphi(r_2) = 0 + 0 = 0$

Το ίδιο και για το γινόμενο.

$Ker\varphi \triangleleft R \Leftrightarrow \forall r \in Ker\varphi$ και $\forall r' \in R \Rightarrow$

$\Rightarrow rr'$ και $r'r \in Ker\varphi$

$\varphi(rr') = \varphi(r) \cdot \varphi(r') = 0 \cdot r' = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow rr' \in Ker\varphi$

Αν $I \triangleleft R$, τότε ορίζεται το πηλίκο R/I

Ορίζεται η φυσική προβολή:

$\pi: R \to R/I$ με τύπο $\pi(r) = I + r$

$\pi(r + r') = I + r + r' = I + r + I + r' = \pi(r) + \pi(r')$

$\pi(r \cdot r') = I + rr' = (I + r)(I + r') = \pi(r) \cdot \pi(r')$

ομομορφισμός και επιμορφισμός.

$Ker\,\pi = \{ r \mid \pi(r) = 0_{R/I} = I \}$

$\pi(r) = I \Leftrightarrow r + I = I \Leftrightarrow r \in I \Rightarrow$

$\Rightarrow Ker\,\pi = I$

$\pi: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \Rightarrow Ker\,\pi = p\mathbb{Z}$

Πρώτο Θεώρημα Ισομορφισμών:

Αν $\varphi: R \to T$ επιμορφισμός, τότε ορίζεται ισομορφισμός δακτυλίων $\bar{\varphi}: R/Ker\varphi \to T$

και γράφουμε $R/Ker\varphi \cong T$.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, two heads, "\varphi"] \arrow[dr, dashed, "\pi"'] & T \\ & R/Ker\varphi \arrow[u, "\bar{\varphi}"'] \end{tikzcd}$$

Ορίζουμε $\bar{q} : R/\ker q \to T$ με τύπο:

$\bar{q}(\ker q + r) = q(r)$

$\ker \bar{q} = \{\ker q + r \mid \bar{q}(\ker q + r) = 0_T\}$

$\bar{q}(\ker q + r) = 0_T \Leftrightarrow q(r) = 0_T \Leftrightarrow$

$r \in \ker q$ μηδενικό στοιχείο του πηλίκου $R/\ker q$. Δηλαδή $\ker \bar{q} = \{\ker q\}$ μόνο ένα στοιχείο

Η $\bar{q}$ είναι 1-1

Η $\bar{q}$ είναι επί. $\forall b \in T \underset{(q \text{ επί})}{\Rightarrow} \exists a \in R$ με

$q(a) = b \Rightarrow \bar{q}(\ker q + a) = b$

Δηλ. η $\bar{q}$ είναι $\cong$

<u>π.χ</u>:

$q((n, m) + (n', m')) = q(n+n', m+m') =$

$n + n' = q(n, m) + q(n', m')$

$q((n, m)(n', m')) = q(nn', mm') =$

$nn' = q(n, m)\, q(n', m')$

$\ker q = \{(n, m) \mid q(n, m) = 0\} =$

$\{(0, m) \mid m \in \mathbb{Z}\}^{n=0}$

$\ker q = \{0\} \oplus \mathbb{Z} \leq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/\ker q \overset{1\Theta\Sigma}{\cong} \mathbb{Z}$

$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/\{0\} \oplus \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$